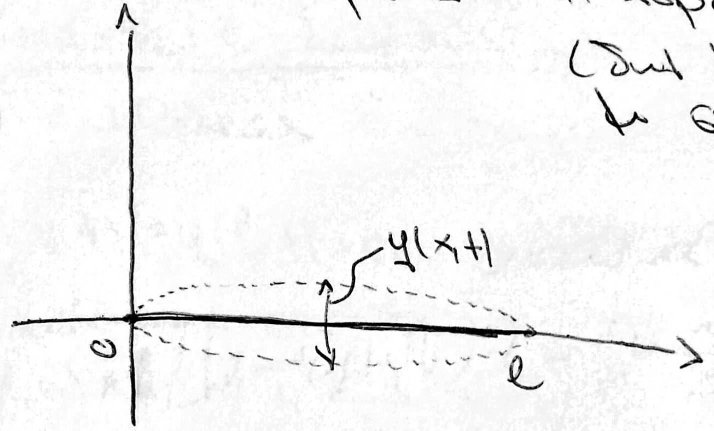
## Παράδειγμα

Ο ήχος, πώς ακούμε?

Ο ήχος σε μία διάσταση. Έστω μία χορδή πακτωμένη στα σημεία 0 και $\ell$. Θεωρούμε ότι η μετατόπιση γίνεται κατά τον άξονα $y$ και είναι μικρή σε σχέση με το μήκος της χορδής. Η χορδή έχει πυκνότητα μάζας (δηλ. μάζα ανά μονάδα μήκους) $\mu$ σταθερή και σταθερή τάση $F$.




Ν.Β. η κινητική και η δυναμική ενέργεια της χορδής και αν θεωρήσουμε μικρές μετατοπίσεις ώστε $|y_x| \ll 1$ (είναι μικρή) ν.β. η εξίσωση που ικανοποιεί η πάλλουσα χορδή.

$y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$

## Λύση

**Κινητική Ενέργεια:**

$$T = \left(\frac{1}{2} m u^2\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\mu}_{\text{μάζα στη μονάδα μήκους}} \underbrace{\int_0^\ell y_t^2 \, dx}_{\text{ταχύτητα στη μονάδα μήκους}}$$

**Δυναμική Ενέργεια:**

$$V = F \cdot \Delta \ell$$

Το μήκος σε κάθε χρονική στιγμή είναι:

$$\Delta l = \int_0^l \sqrt{1+(y_x)^2}\, dx - l$$

$$\Rightarrow \Delta l = \int_0^l \sqrt{1+(y_x)^2}\, dx - \int_0^l dx$$

$$\Rightarrow \Delta l = \int_0^l \left[\sqrt{1+(y_x)^2} - 1\right] dx$$

Άρα η εξίσωση Lagrange θα είναι:

$$L = T - V \Rightarrow L = \int_0^l \left[\frac{\mu}{2} y_t^2 - F\left(\sqrt{1+(y_x)^2} - 1\right)\right] dx$$

Γνωρίζουμε ότι $|y_x| \ll 1$

**Θεώρημα Taylor**

$(1+x)^n \approx 1+nx$

$|x| \ll 1 \quad = f(0)+f'(0)x$

Οπότε:

$$L = \int_0^l \left[\frac{\mu}{2} y_t^2 - F\left(\cancel{1} + \frac{1}{2} y_x^2 - \cancel{1}\right)\right] dx$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \int_0^l \left[\frac{\mu}{2} y_t^2 - \frac{F}{2} y_x^2\right] dx} = L[y]$$

Άσκηση:

Ν.δ.ο η εξίσωση Euler της συνάρτησης είναι:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{ή} \quad \mu y_{tt} = F y_{xx}$$

Ορίζουμε: $c^2 = F/\mu$ τη ταχύτητα διάδοσης του κύματος

<u>Τελικά:</u>

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$ ⇝ εξίσωση κύματος.

<u>Συνοριακές Συνθήκες:</u>

- Συνθήκες στο χώρο:

$$y(0,t) = y(l,t) = 0$$

Συνθήκες στο χρόνο:

$$y(x,0) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

Γράφω τη λύση ως: $y(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

- Αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$$T''X - c^2 T X'' = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}}_{} = \lambda^2$$

↳ δύο συναρτήσεις ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ίσες μόνο αν είναι σταθερές

$$\Rightarrow \begin{cases} T'' - c^2\lambda^2 T = 0 \\ X'' - \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

<u>Πρέπει</u>: $X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda l} + c_2 e^{-\lambda l} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Έχουμε κάνει λάθος γιατί η σταθερά $\lambda^2$ μπορεί να είναι και αρνητική.

Οπότε έχουμε: $(-\lambda^2)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} T'' + c^2\lambda^2 T = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)$$

$$X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \sin(\lambda l) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = k\pi \Rightarrow \lambda = \frac{k\pi}{l} = \left(\frac{\pi}{l}\right)k, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\boxed{X(x) = c_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l} k\right)} \ !$$

$$T(t) = c_3 \sin(\lambda c t) + c_4 \cos(\lambda c t)$$

$$y(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda x)\left[\lambda c c_3 \cos(\lambda c t) - \lambda c c_4 \sin(\lambda c t)\right] = 0$$

$$\overset{t=0}{\Rightarrow} c_3 = 0$$

Άρα $y(x,t) = A \sin\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{kc\pi t}{l}$

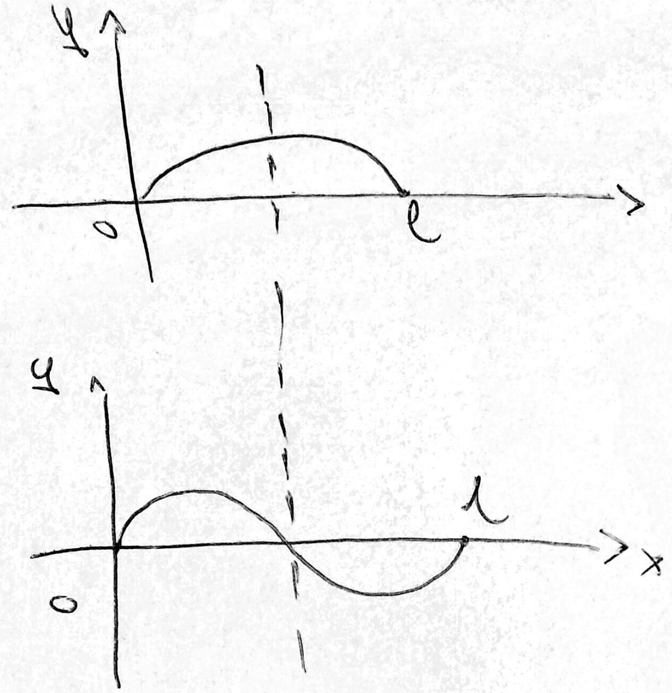
Σε χρονική στιγμή $t=0$ : $\boxed{y(x,0) = f(x)}$

Το A προκύπτει από σειρές Fourier:

$$A = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx$$

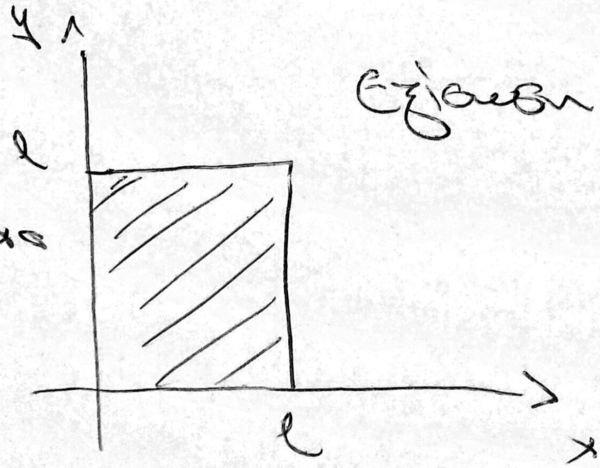
$\lambda = \frac{\pi}{\ell}k$ για $k=1$ $\lambda_1 = \frac{\pi}{\ell}$ άρα $\boxed{\lambda = k\lambda_1}$

$k=1$:




(Οι λύσεις αντιστοιχούν στις ακέραιες τιμές του $k$.)

Τύμπανο




Εξίσωση κύματος: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda^2 \rightsquigarrow \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \underbrace{\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = \mu}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T'' + \lambda^2 c^2 T = 0 \\ X'' + \mu^2 X = 0 \\ Y'' + (\lambda^2 - \mu^2) Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = m\pi \\ \lambda^2 = n^2\pi^2 + \mu^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = m\pi \\ \boxed{\lambda = \sqrt{n^2 + m^2}\,\pi} \end{cases}$$ ⇝ δεν μπορώ να ορίσω $\lambda_1$ : $\lambda = \lambda_1 \cdot k$

• <u>Δηλαδή</u>:

$n = 0,\ m = 1$ : $\lambda_1 = \pi$

$n = 1,\ m = 0$ : $\lambda_1 = \pi$

$n = 1,\ m = 1$ : $\lambda = \sqrt{2}\,\pi = \sqrt{2}\,\lambda_1$ ⇝ όχι ακέραιος

# ΤΕΛΟΣ